数理解析研究所講究録
270巻 1976年 120-126

直並列アレイアクセプタと二次元マーカーオートマトンに関するある性質

広島大 工学部 井上克司
広島大 工学部 中村 昭

本稿では，まず直並列アレイアクセプタ(PSA)[‡]ならびに二次元1マーカー(2マーカー)オートマトン[‡]によって定義可能な言語のChomsky Hierarchyにおける位置づけに関する2,3の結果が与えられ，ついで，この結果を用いて，PSAと二次元1マーカー(2マーカー)オートマトンの間の受理能力に関する比較が論じられる．

<u>定義</u> 記号の有限集合Σ上のn次元テープとは，Σの要素からなる$l_1 \times \cdots \times l_n$矩形配列(各$l_i$は，1以上の整数)をいう。$\Sigma$上のすべての$n$次元テープの集合を$\Sigma^{(n)+}$と記す．$n$次元テープ$x$上の座標$(i_1, \cdots, i_n)$に位置する記号を$x_{i_1,\cdots,i_n}$と記し，また第$i$番目$(1 \leq i \leq n)$の座標軸に関する$x$の長さを$l_i(x)$と記す．

‡ 直並列アレイアクセプタの定義については文献[1,2]を，また二次元マーカーオートマトンの定義については文献[3]を参照されたし。以下において，PSA(DPSA，1WPSA，1WDPSA)は，非決定性(決定性，1方向非決定性，1方向決定性)直並列アレイアクセプタを表わし，また，2-M_1(2-DM_1，2-M_2，2-DM_2)は，二次元非決定性1マーカー(二次元決定性1マーカー，二次元非決定性2マーカー，二次元決定性2マーカー)オートマトンを表わす．さらに，たとえば，$\mathcal{L}$(PSA)はPSAの受理する二次元テープの集合のクラスを表わす。

<u>定義</u>　言語 $L \subseteq \Sigma^{(1)+}$ が PSA (DPSA, 1WPSA, 1WDPSA, 2-M_1, 2-DM_1, 2-M_2, 2-DM_2) 定義可能であるというのは, $L = L(M)$ なる PSA (DPSA, 1WPSA, 1WDPSA, 2-M_1, 2-DM_1, 2-M_2, 2-DM_2) M が存在して, $\Sigma' \supseteq \Sigma$ となる場合である. ただし, Σ' は M の入力記号集合であり, $L(M) = \{ w \in \Sigma^{(1)+} \mid {}^{\exists}x \in T(M)$ ($T(M)$ は, M の受理する二次元テープの集合), $l_1(w) = l_2(x)$, $1 \leqq k \leqq l_2(x)$ の各 k に対して $w_k = x_{1,k} \}$ である.

<u>定理1</u>[4]　1WPSA 定義可能な言語のクラスは, 1型言語のクラスと一致する.

<u>定理2</u>[5]　2-DM_2 定義可能な言語のクラスは, 0型言語のクラスと一致する.

<u>補題3</u>[6]　非決定性 n^2 テープ限定 Turing machine の受理する言語のクラスは, 1型言語のクラスを真に含む.

<u>定理4</u>　1型言語のクラス $\subsetneqq$ 2-M_1 定義可能な言語のクラス

証明　本定理を証明するには, 補題3より, 非決定性 n^2 テープ限定 Turing Machine によって受理される任意の言語は, 2-M_1 定義可能であることを示せばよい. L を, 非決定性 n^2 テープ限定 Turing Machine $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ ‡ によって受理される言語とする. ただ1つの $K \times \Gamma$ の要素を含む $K \times \Gamma \cup \Gamma$ 上の1次元ストリングを M の計算状況という. 二つの M の計算状況 C と C' の間の関係 '$\underset{M}{\vdash}$' を次のように定義する.

$$C \underset{M}{\vdash} C'$$

$\Leftrightarrow$ ある i ($1 \leqq i \leqq l_1(C)$) に対し, $C_i = (q, a) \in K \times \Gamma$ であり, しかも

‡ M は, 文献[7]の第6章で定義されている1テープの非決定性 Turing Machine であり, しかも, 入力テープの書かれた領域から左にはみ出すことはなく, 長さ n の入力テープを受理するときは高々 n^2 個のコマを使用する, と仮定して一般性を失しない.

① $\delta(q, a) \ni (P, A, L)$ かつ $C_i' = A$ かつ $C_{i-1}' = (P, C_{i-1})$ かつすべての $j\ (1 \leqq j \leqq \ell_1(C),\ j \neq i, i-1)$ に対し $C_j' = C_j$

② $\delta(q, a) \ni (P, A, R)$ かつ $C_i' = A$ かつ $C_{i+1}' = (P, C_{i+1})$ かつすべての $j\ (1 \leqq j \leqq \ell_1(C),\ j \neq i, i+1)$ に対し $C_j' = C_j$

のいずれかが成り立つ.

長さ n^2 のMの計算状況 '$(q_0, a_1)a_2 \cdots a_n BB \cdots B$' (Bはブランク記号) を入力テープ $a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^{(1)+}$ に対するMの初期計算状況という.

さて, 次の性質をもつ図1に示すような二次元テープ $z \in (K \times \Gamma \cup \Gamma \cup$ {ㄣ}$)^{(2)+}$ ('ㄣ' は新しい記号)を考える.

(i) z の第1行 $a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^{(1)+}$.

(ii) 各 $k\ (1 \leqq k \leqq m)$ に対し, z の第 k ブロックが, $a_1 a_2 \cdots a_n$ を入力とするときのMの時刻 k における計算状況を表わす. すなわち,

$$z[k] = b_{k,1,1} b_{k,1,2} \cdots b_{k,1,n} b_{k,2,1} b_{k,2,2} \cdots b_{k,2,n} \cdots\cdots b_{k,n,1} \cdots b_{k,n,n} \in (K \times \Gamma \cup \Gamma)^{(1)+}$$

とおくとき, $z[1]$ は, $a_1 a_2 \cdots a_n$ に対するMの初期計算状況でありしかも次が成り立つ.

$$z[1] \vdash_M z[2] \vdash_M \cdots\cdots \vdash_M z[m]$$

a_1	a_2	$\cdots$	a_n	
ㄣ	ㄣ	$\cdots$	ㄣ	
$b_{1,1,1}$	$b_{1,1,2}$	$\cdots$	$b_{1,1,n}$	第1ブロック
$b_{1,2,1}$	$b_{1,2,2}$	$\cdots$	$b_{1,2,n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$b_{1,n,1}$	$b_{1,n,2}$	$\cdots$	$b_{1,n,n}$	
ㄣ	ㄣ	$\cdots$	ㄣ	
$b_{2,1,1}$	$b_{2,1,2}$	$\cdots$	$b_{2,1,n}$	第2ブロック
$b_{2,2,1}$	$b_{2,2,2}$	$\cdots$	$b_{2,2,n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$b_{2,n,1}$	$b_{2,n,2}$	$\cdots$	$b_{2,n,n}$	
ㄣ	ㄣ	$\cdots$	ㄣ	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
ㄣ	ㄣ	$\cdots$	ㄣ	
$b_{m,1,1}$	$b_{m,1,2}$	$\cdots$	$b_{m,1,n}$	第mブロック
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
$b_{m,n,1}$	$b_{m,n,2}$	$\cdots$	$b_{m,n,n}$	
ㄣ	ㄣ	$\cdots$	ㄣ	

図1. 定理4の証明のための図

(iii) $Z[m]$ が受理計算状況である，すなわち，$F \times \Gamma$ の要素を含む．

このような性質をもつ二次元テープ Z を M の受理計算状況表現テープといい，M のすべての受理計算状況表現テープの集合を $T_S(M)$ と記す．目的とすることを示すには，この $T_S(M)$ を受理する 2-M_1 M' が存在することを示せばよい（M は，n^2 テープ限定であることに注意）。次の動作を行なう 2-M_1 M' に対し，$T(M') = T_S(M)$ が成り立つことは容易に知れる。

(1) 入力テープ Z が図1の形をしていることをチェックする．

(2) $Z[1]$ が，Z の第1行目に対する M の初期計算状況であることをチェックする．

(3) 各 k $(1 \leqq k \leqq m-1)$ に対し，$Z[k] \underset{M}{\vdash} Z[k+1]$ であることをチェックする．このチェックは，次のようにしてなされる．M の受理計算状況表現テープ Z の第 k ブロックと第 $k+1$ ブロックは，M のヘッドの位置の変化を示す部分を除いては全く同一であることに注意しよう．$\mathcal{C}_{k,i,j} = \mathcal{C}_{k+1,i,j}$ であることをチェックするためには，M' はまず記号 $\mathcal{C}_{k,i,j}$ の書かれているコマにマーカーを置く．ついで，$\mathcal{C}_{k,i,j}$ を記憶し，テープの第 j 列に沿って‘タ’を通り過ぎるまで下方に進む．‘タ’を通過すると，制御部に記憶されている $\mathcal{C}_{k,i,j}$ と同一の記号を読むたびに，そのまま第 j 列に沿って下方に進み続けるかあるいは $90°$ 向きを変えてテープの右境界記号‘#’（文献[3]では境界記号として‘B’を用いているが，本稿では M のブランク記号‘B’と区別するため，境界記号として‘#’を用いる）に向けて右方に進むかのいずれかの動作を行なう．後者の選択をとると，M' は右境界記号にぶつかった後，今度はテープの左境界記号‘#’にぶつかるまで対角線に沿って左上方に進み，左境界記号にぶつ

かると(タの書かれている行があるので)1コマ上に動いて，再び右方向に進む。この時，右境界記号'#'にぶつかる以前にマーカーとぶつかれば，$t_{k,i,j}=t_{k+1,i,j}$であることがチェックされたことになる。

$t_{k,i,j}=(q,a)\in K\times\Gamma$のときは，(i) $\delta(q,a)\ni(P,A,L)$かつ$t_{k+1,i,j}=A$かつ$t_{k+1,i,j-1}=(P,t_{k,i,j-1})$ ($j=1$のときは，$t_{k+1,i-1,n}=(P,t_{k,i-1,n})$)，あるいは(ii) $\delta(q,a)\ni(P,A,R)$かつ$t_{k+1,i,j}=A$かつ$t_{k+1,i,j+1}=(P,t_{k,i,j+1})$ ($j=n$のときは，$t_{k+1,i+1,1}=(P,t_{k,i+1,1})$)，であることをチェックする必要があるが，M′はこのチェックを容易に行なうことができる。

(4) $Z[m]$が受理計算状況であることをチェックする。

(5) 上のすべてのチェックが肯定的である時のみ，M′は受理状態に入る。

(証終)

<u>補題5</u>　非決定性消去不能Writing Stack Automaton (NEWSA)[8]の受理する言語のクラスは，0型言語のクラスに真に含まれる。

証明　NEWSAの受理する任意の言語は，決定性2^{cn}テープ限定Turing Machineによって受理され[8]，従って帰納的集合である。　(証終)

<u>定理6</u>　(1) 1型言語のクラス $\subsetneqq$ DPSA(PSA)定義可能な言語のクラス。

(2) DPSA(PSA)定義可能な言語のクラス $\subsetneqq$ 0型言語のクラス。

証明　(1)の成り立つことは，定理4の証明中で述べた$T_s(M)$を受理するDPSAを構成することができることから示される。(2)の成り立つことを示すには，PSA $M=(\Sigma,K,q_0,\delta,u,F)$によって定義可能な言語$L(M)$は，あるNEWSAによって受理されることを示せば十分である(補題5より)。

ある二次元テープ x ($l_1(x)=m$, $l_2(x)=n$) が M に入力されたときの M の動作を次のように模倣する NEWSA M′ を考える。最初，M′ には，入力テープとして ¢$x_{1,1}\,x_{1,2}\cdots x_{1,n}$\$ が与えられる．まず M′ は，入力 $x_{1,1}\,x_{1,2}\cdots x_{1,n}$ をスタック上にコピーしその後に特別な区切り記号 '#' を書く．ついで，入力テープをカウンタとして用い（長さ n を数えるのに利用），記号 $x_{2,j}$ ($1\leqq j\leqq n$) を非決定的に想像して，スタック上の記号 '#' に続けて系列 $x_{2,1}\,x_{2,2}\cdots x_{2,n}$ を書き込み その後に記号 '#' を書く．以後，M′ はスタック上に x の最後行 $x_{m,1}\,x_{m,2}\cdots x_{m,n}$ # を書き込むまで同様な動作をくり返す．この後，M′ はスタックヘッドを第1ブロックに移し（各 i，$1\leqq i\leqq m$，に対し，x の第 i 行 $x_{i,1}\,x_{i,2}\cdots x_{i,n}$ が書かれている '#' にはさまれたスタックテープ部分を第 i ブロックとよぶ），M の動作を模倣しはじめる．M′ が，書き込み可能な入力テープとスタックテープの第 i ブロックを用いて，M の（入力テープ x の）第 i 行上での動作を模倣することができることは容易に示されるがその詳細については省略する．M′ が M の動作を模倣する際に，M の第1セル A_1 が F（M の受理状態集合）の中のある状態に入ることが見い出される場合に限って，M′ は入力テープを受理するように働く．以上の M′ が，L(M) を受理することは，明らかである．（証終）

以下，受理能力に関して考察しよう．

<u>補題7</u>　$T=\{x\in\{0,1\}^{(2)+}\mid l_1(x)=l_2(x)+1$ かつ ある i ($1\leqq i\leqq l_1(x)-1$)，すべての k ($1\leqq k\leqq l_2(x)$) に対し，$x_{i,k}=x_{l_1(x),k}\}\notin\mathcal{L}$(IWDPSA)

証明　文献〔10〕の定理3の証明と同様.　　　(証終)

__補題8__　補題7における $T \in \mathcal{L}(2\text{-}DM_1)$.　　　(証明略)

__補題9__[1]　PSA, 1WPSA (DPSA, 1WDPSA) の受理する1行からなる二次元テープの集合のクラスは, 1型言語 (決定性1型言語) のそれと一致する.

__補題10__[3]　$2\text{-}DM_1$, $2\text{-}M_1$ の受理する1行からなる二次元テープの集合のクラスは, 正規言語のそれと一致する.

__補題11__　$2\text{-}DM_2$ $(2\text{-}M_2)$ の受理する1行からなる二次元テープの集合のクラスは, 決定性1型言語 (1型言語) のそれに真に含まれる.

証明　$2\text{-}DM_2$ $(2\text{-}M_2)$ の受理する1行からなる二次元テープの集合のクラスは, $\mathcal{L}(1\text{-}DM_2)$ $(\mathcal{L}(1\text{-}M_2))^{\dagger}$ と一致する. ところが, 文献〔9〕の定理1, 系1, 系2から, $\mathcal{L}(1\text{-}DM_2) \subsetneq \mathcal{L}(1\text{-}DM_5)$, $\mathcal{L}(1\text{-}M_2) \subsetneq \mathcal{L}(1\text{-}M_5)$ が得られ, また明らかに, $\mathcal{L}(1\text{-}DM_5) \subseteq$ 決定性1型言語のクラス, $\mathcal{L}(1\text{-}M_5) \subseteq$ 1型言語のクラス, であるから, 本補題が成り立つ ▮

$\dagger$ $\mathcal{L}(1\text{-}DM_k)$ $(\mathcal{L}(1\text{-}M_k))$ は, 一次元決定性 (非決定性) kマーカーオートマトンの受理する言語のクラスを表す.

定理1, 定理2, 定理4, 定理6, 補題7〜補題11より, 次の定理が得られる.

__定理12__　$\mathcal{L}(2\text{-}DM_1) \not\lessgtr \mathcal{L}(1WDPSA)$; $\mathcal{L}(2\text{-}M_1) \not\lessgtr \mathcal{L}(1WPSA), \mathcal{L}(1WDPSA)$; $\mathcal{L}(2\text{-}DM_2) \not\lessgtr \mathcal{L}(1WPSA), \mathcal{L}(1WDPSA), \mathcal{L}(PSA), \mathcal{L}(DPSA)$; $\mathcal{L}(2\text{-}M_2) \not\lessgtr \mathcal{L}(1WPSA), \mathcal{L}(PSA)$. ('$\not\lessgtr$' は比較不能であることを表わす)

__文献__ 〔1〕__井上, 中村__ : 信学論(D), 昭50-3, P.167. 〔2〕__井上, 中村__ : オートマトンと言語研資 AL74-24. 〔3〕__M.Blum & C.Hewitt__ : IEEE, SWAT (1967), P.155. 〔4〕__井上, 中村__ : オートマトンと言語研資 AL74-63. 〔5〕__井上, 中村__ : 'マーカーオートマトンによる0型言語の特徴づけ', 日本数学会応用数学分科会予稿 (1975, 4月), 〔6〕__H. Ibarra__ : JACM, vol.19, No.4, October, P.608. 〔7〕__J.E.Hopcroft & J.D.Ullman__ : Addison-Wesley (1969). 〔8〕__J.A.Giuliano__ : JCSS 6, 1972, P.168. 〔9〕__O.H.Ibarra & R.T.Melson__ : Intern.J.Computer Math. 1974, vol.4, Section A, P.269. 〔10〕__A.Rosenfeld, et al__ : Information Processing Letters 2, 1973, P.43